Exercice N°3

1 Soit la fonction f définie sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ par $f(x)=\tan(x)$

a Montrer que f réalise une bijection de $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ sur $[0;1]$

b Montrer que f^{-1} est dérivable sur $[0;1]$ et déterminer $(f^{-1})'(x)$

c Calculer $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

2 Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par: $\begin{cases} I_0=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \\ I_n=\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx \text{ pour } n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$

a Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a: $0\leq I_n\leq\frac{1}{2n+1}$

b Montrer que (I_n) est convergente

3 **a** Montrer que: $\forall n\in\mathbb{N}^*$, on a: $I_{n+1}+I_n=\frac{1}{2n+1}$

b Calculer alors: $J=\int_0^1 \frac{7x^8+7x^6-3x^4+4}{x^2+1}dx$

---

1 Soit la fonction f définie sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ par $f(x)=\tan(x)$

a Montrer que f réalise une bijection de $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ sur $[0;1]$

. f est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{4}]$

et $\forall x\in[0,\frac{\pi}{4}]$:

$f'(x)=1+\tan^2(x)>0$

. on a f est continue et

strictement croissante sur $[0,\frac{\pi}{4}]$

Donc elle realise une bijection